

CONTROLE \mathcal{H}_∞ NÃO LINEAR DE ROBÔS MÓVEIS EM FORMAÇÃO

WALLISSON L. DE O. FIGUEIREDO*, MARCO H. TERRA*, ADRIANO A. G. SIQUEIRA†, TATIANE B. R. FRANCISCO*

**Departamento de Engenharia Elétrica - Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo - 13566-590, São Carlos, SP, Brasil*

†*Departamento de Engenharia Mecânica - Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo - 13566-590, São Carlos, SP, Brasil*

Emails: walli@sel.eesc.usp.br, terra@sel.eesc.usp.br, siqueira@sc.usp.br,
tatibrf@sel.eesc.usp.br

Abstract— This paper presents designs of nonlinear \mathcal{H}_∞ controllers for a group of wheeled mobile robots (WMRs) in formation. The wheeled mobile robots exchange informations according to a pre-specified communication digraph. A stable motion is generated by a decentralized control law. The nonlinear dynamic equations of the robots are described in state-space form. The parameters matrices depend on the angular velocities of the wheels. This representation, known as Quasi-Linear Parameter Varying (Quasi-LPV), is useful for control designs based on nonlinear \mathcal{H}_∞ approaches.

Keywords— Robust Control, Formation of WMRs, Quasi-LPV.

Resumo— Este artigo apresenta projetos de controladores \mathcal{H}_∞ não lineares para coordenação de robôs móveis com rodas (RMRs) em formação. A troca de informação entre os robôs móveis ocorre através de um grafo direcionado (dígrafo) de comunicação pré-especificado. Um movimento estável é gerado por uma lei de controle descentralizada. As equações dinâmicas não lineares de robôs móveis são descritas em espaço de estado. As matrizes de parâmetros do sistema são dependentes das velocidades angulares das rodas. Esta representação, conhecida como Quase-Linear a Parâmetros Variantes (Quase-LPV), é útil nos projetos de controle baseados na metodologia \mathcal{H}_∞ não linear.

Palavras-chave— Controle Robusto, Formação de Robôs Móveis, Quase-LPV.

1 Introdução

Nos últimos anos, as pesquisas no campo de controle e coordenação de múltiplos robôs móveis têm crescido significativamente, principalmente aquelas que possuem aplicações como exploração (Kruppa et al., 2000), procura e resgate (Whelan et al., 1997), mapeamento de locais desconhecidos (Nilsson et al., 1995) e transporte de grandes objetos (Sugar and Kumar, 2000). Neste artigo, considera-se um conjunto de robôs móveis com rodas (RMRs) em formação, ou seja, os robôs devem manter constantes as posições e orientações relativas dentro da formação. Cada RMR fornece a sua informação de posição somente a um subconjunto do grupo, estabelecido pelo projetista através de um dígrafo. Em (A. Willians, 2005), uma lei de controle descentralizada é proposta para o controle de formação de RMRs, considerando que cada robô é representado por um ponto no espaço cartesiano. Restrições cinemáticas e dinâmicas específicas de cada tipo de robô não são consideradas nesta referência.

A partir das trajetórias desejadas geradas pelo controlador descrito em (A. Willians, 2005), neste artigo são projetados controladores robustos que consideram as características cinemáticas e dinâmicas dos robôs móveis em formação. Os robôs móveis considerados são do tipo uniclo, com duas rodas paralelas atuadas e uma roda passiva, que apresentam restrições cinemáticas específicas.

Controladores \mathcal{H}_∞ não lineares, desenvolvidos a partir da representação quase-LPV dos robôs móveis (dos Reis et al., 2005), são utilizados para atenuar os efeitos das incertezas paramétricas e distúrbios externos presentes neste tipo de sistema e não considerados em (A. Willians, 2005).

Este artigo está organizado da seguinte forma: a Seção 2 descreve o controle de formação, suas propriedades e a sua representação; a Seção 3 apresenta o controle \mathcal{H}_∞ não linear via representação quase-LPV para RMRs, incluindo a descrição dos modelos cinemáticos e dinâmicos adotados; a Seção 4 apresenta a solução do controle \mathcal{H}_∞ com realimentação de estado; e a Seção 5 apresenta os resultados de simulação de robôs em formação com a aplicação dos controladores propostos.

2 Controle de Robôs Móveis em Formação

O controle de formação tem como objetivo fazer com que os robôs móveis alcancem e mantenham posições e orientações fixas com relação a cada robô móvel da formação. Nesta seção é apresentado o controlador descentralizado proposto em (A. Willians, 2005). As posições e velocidades dos N robôs móveis no plano são descritas pelas seguintes equações de estado:

$$\dot{x}_i = A_{veh}x_i + B_{veh}u_i, \quad (1)$$

para $i = 1, 2, \dots, N$ e $x_i \in \mathbb{R}^{2n}$, sendo x_i as posições do i -ésimo RMR e suas respectivas velocidades, e u_i as entradas de controle. As matrizes A_{veh} e B_{veh} têm a seguinte forma:

$$\mathbf{A}_{veh} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & 0 & a_{44} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_{veh} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

sendo a_{ij} constantes relacionadas com a trajetória desejada para o robô líder. Os zeros nas colunas um e três de A_{veh} são necessários uma vez que garantem a convergência dos robôs móveis para a formação (G. Laferriere, 2004).

O vetor $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ descreve a combinação de todos os estados dos N RMRs. Utiliza-se a notação $x_p = ((x_p)_1, \dots, (x_p)_N)^T$, $x_v = ((x_v)_1, \dots, (x_v)_N)^T$ para denotar os vetores de posição e velocidade, respectivamente, de tal modo que $x = x_p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_v \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (\otimes representa o Produto de Kronecker).

Definição 1: Uma formação é um vetor $h = h_p \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2nN}$. Os N RMRs estão em formação h no tempo t se existirem vetores $q, w \in \mathbb{R}^n$ tais que $(x_p)_i(t) - (h_p)_i = q$ e $(x_v)_i(t) = w$, para $i = 1, 2, \dots, N$. Os RMRs convergem para a formação h se existirem funções $q(\cdot), w(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ tais que $(x_p)_i(t) - (h_p)_i - q(t) \rightarrow 0$ e $(x_v)_i(t) - w(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow \infty$, para $i = 1, \dots, N$.

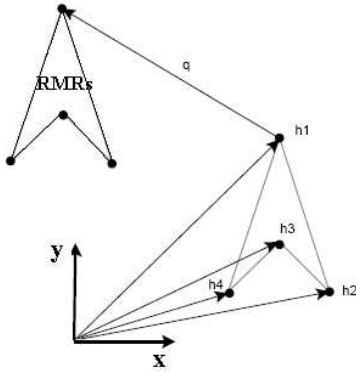


Figura 1: Quatro RMRs em formação

A Figura 1 apresenta quatro RMRs em formação. A comunicação entre os robôs é representada por um dígrafo Γ , que mostra as ligações entre os robôs. Cada vértice representa um RMR e existe uma borda direcionada de um vértice ao outro se há comunicação entre os robôs destes vértices. Diz-se que o primeiro RMR é vizinho do segundo. Para cada RMR i , J_i denota o conjunto de seus vizinhos. A natureza descentralizada do sistema de controle utilizado deve-se ao fato de que cada controle u_i está em função de $x_j - x_i$ e $h_j - h_i$ para cada $j \in J_i$.

Um modo de combinar as informações relativas a cada RMR, (J. Fax, 2003), é definir as funções de saída y_i , calculadas pelas médias dos deslocamentos relativos (e velocidades) dos vizinhos dos respectivos robôs móveis, da seguinte forma:

$$y_i = (x_i - h_i) - \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i} (x_j - h_j) \quad i = 1, \dots, N.$$

sendo que $|J_i|$ indica o número de vizinhos para o robô i . Para o caso em que há um líder na formação, em torno do qual os outros RMRs devem ajustar seus movimentos, a função de saída z_i é dada por:

$$z_i = \frac{1}{|J_i|} \sum_{j \in J_i} ((x_i - h_i) - (x_j - h_j)), \text{ se } |J_i| \neq 0$$

$$z_i = 0, \text{ caso contrário,}$$

para $i = 1, \dots, N$. O vetor de saída z pode ser escrito como $z = L(x - h)$ sendo $L = L_\Gamma \otimes I_{2n}$ e L_Γ a matriz direcionada Laplaciana do dígrafo Γ (A. Willians, 2005). Agrupando as equações para todos os RMRs em um único sistema em espaço de estado tem-se:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$z = L(x - h)$$

sendo $A = I_N \otimes A_{veh}$ e $B = I_N \otimes B_{veh}$. Considerando uma matriz de realimentação F da forma $F = I_N \otimes F_{veh}$, uma lei de controle descentralizada aplicada a todos os robôs móveis, as equações para todos os RMRs são dadas por:

$$\dot{x} = I_N \otimes A_{veh}x + L_\Gamma \otimes B_{veh}F_{veh}(x - h). \quad (3)$$

Considerando que a matriz de realimentação F_{veh} tem a seguinte forma:

$$\mathbf{F}_{veh} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix},$$

condições necessárias e suficientes para a estabilidade dos robôs móveis em formação são obtidas se $f_1 < 0$, $f_2 < 0$ (A. Willians, 2005).

A principal finalidade do controle de formação é investigar a relação entre as matrizes de realimentação F_{veh} que garantem a convergência para a formação e a estrutura de A_{veh} . Os elementos da A_{veh} são os parâmetros que definem a trajetória desejada para o robô líder. O controle mostrado acima gera as trajetórias que os demais RMRs devem realizar para entrar em formação com o líder. Essas trajetórias são utilizadas neste trabalho como trajetórias de referência para os robôs móveis do tipo unicycle.

3 Modelagem de Robôs Móveis com Rodas

Nesta seção serão apresentados os modelos cinemático e dinâmico de RMRs do tipo unicycle.

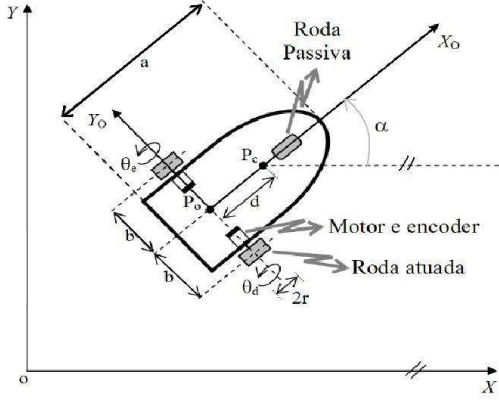


Figura 2: Robô Móvel

Para tal, considerou-se que todos os RMRs têm a mesma dimensão. A geometria do robô é mostrada na Figura 2.

Na Figura 2, (X, Y) é o sistema de coordenadas inercial; (X_0, Y_0) é o sistema de coordenadas local; a é o comprimento do robô; d é a distância entre P_0 (centro do eixo das rodas atuadas) e P_c (centro de massa); b é a distância entre uma roda atuada e o eixo de simetria do robô; r é o raio das rodas atuadas; α é o ângulo (direção do robô) entre o eixo X e o eixo de simetria do robô no sentido horário e θ_d e θ_e são os deslocamentos angulares das rodas direita e esquerda, respectivamente.

3.1 Modelo Cinemático

Robôs móveis do tipo uniclo apresentam três restrições cinemáticas (P. Coelho, 2003). Assumindo que a velocidade de P_{0i} deve estar na direção do eixo de simetria (eixo X_{0i}), tem-se a primeira restrição com relação a P_{ci} , dada por:

$$\dot{y}_{c_i} \cos \alpha_i - \dot{x}_{c_i} \sin \alpha_i - d \dot{\alpha}_i = 0, \quad i = 1, \dots, N$$

sendo N o número de RMRs considerados, (x_{c_i}, y_{c_i}) as coordenadas do centro de massa P_{c_i} no sistema de coordenadas inercial e α_i o ângulo entre o eixo de simetria de cada robô da formação e o eixo X . As outras duas restrições estão relacionadas com a rotação das rodas, ou seja, as rodas atuadas não podem girar em falso:

$$-\dot{x}_{c_i} \cos \alpha_i - \dot{y}_{c_i} \sin \alpha_i - b \dot{\alpha}_i + r \dot{\theta}_{d_i} = 0,$$

$$-\dot{x}_{c_i} \cos \alpha_i - \dot{y}_{c_i} \sin \alpha_i + b \dot{\alpha}_i + r \dot{\theta}_{e_i} = 0.$$

Definindo a coordenada generalizada $q_{1_i} = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_i \ \theta_{d_i} \ \theta_{e_i}]^T = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_i \ q_{2_i}^T]^T$, então as três restrições cinemáticas podem ser representadas em espaço de estado na forma:

$$A(q_{1_i}) \dot{q}_{1_i} = \begin{bmatrix} -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & -d & 0 & 0 \\ -\cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & -b & r & 0 \\ -\cos \alpha_i & -\sin \alpha_i & b & 0 & r \end{bmatrix} \dot{q}_{1_i} = 0. \quad (4)$$

A matriz $A(q_{1_i})$ tem posto pleno e pode ser expressa como $[A_1(q_{1_i})_{3 \times 3} \ A_{2_{3 \times 2}}]$, tal que

$A_1(q_{1_i})$ é não-singular. Define-se $S(q_{1_i}) = [-A_1^{-1}(q_{1_i})A_2 \ I_{2 \times 2}]^T$ tal que $A_1(q_{1_i})S(q_{1_i}) = 0$. Assim, encontra-se

$$S(q_1) = \begin{bmatrix} c(b \cos \alpha_i - d \sin \alpha_i) & c(b \cos \alpha_i + d \sin \alpha_i) \\ c(b \sin \alpha_i + d \cos \alpha_i) & c(b \sin \alpha_i - d \cos \alpha_i) \\ c & -c \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

sendo $c = \frac{r}{2b}$. A equação cinemática é formada pelo produto de $S(q_{1_i})$ por $\dot{q}_{2_i} = [\dot{\theta}_{d_i} \ \dot{\theta}_{e_i}]^T$, i.e.:

$$\dot{q}_{1_i}(t) = S(q_{1_i}) \dot{q}_{2_i}(t) \quad (5)$$

ou

$$\dot{x}_{c_i} = c(b \cos \alpha_i - d \sin \alpha_i) \dot{\theta}_{d_i} + c(b \cos \alpha_i + d \sin \alpha_i) \dot{\theta}_{e_i}, \quad (6)$$

$$\dot{y}_{c_i} = c(b \sin \alpha_i + d \cos \alpha_i) \dot{\theta}_{d_i} + c(b \sin \alpha_i - d \cos \alpha_i) \dot{\theta}_{e_i}, \quad (7)$$

$$\dot{\alpha}_i = c(\dot{\theta}_{d_i} - \dot{\theta}_{e_i}). \quad (8)$$

3.2 Controlador Baseado na Cinemática

Nesta seção é apresentado o controlador baseado na cinemática proposto por (Y. Kanayama, 1990). Este controlador fornece as velocidades desejadas das rodas esquerda e direita, tais que os RMRs acompanhem as trajetórias de referência geradas pelo controle de formação.

Considere o erro $q_{e_i} = [x_{e_i} \ y_{e_i} \ \alpha_{e_i}]^T$, entre as trajetórias de referência $P_{r_i} = [x_{r_i} \ y_{r_i} \ \alpha_{r_i}]^T$ dadas pela Equação (3) e as posições atuais dos RMRs, $P_{c_i} = [x_{c_i} \ y_{c_i} \ \alpha_{c_i}]^T$, dadas por:

$$x_{e_i} = \cos \alpha_{c_i} (x_{r_i} - x_{c_i}) + \sin \alpha_{c_i} (y_{r_i} - y_{c_i}),$$

$$y_{e_i} = -\sin \alpha_{c_i} (x_{r_i} - x_{c_i}) + \cos \alpha_{c_i} (y_{r_i} - y_{c_i}),$$

$$\alpha_{e_i} = \alpha_{r_i} - \alpha_{c_i}.$$

sendo $[x_{r_i} \ y_{r_i}]^T = q_{r_i}$ a trajetória de referência escolhida e $\alpha_{r_i} = \text{tg}^{-1}(\dot{y}_{r_i}/\dot{x}_{r_i})$. As velocidades lineares (v_i^d) e angulares (ω_i^d) desejadas dos RMRs são dadas por

$$v_i^d = v_{r_i} \cos(\alpha_{e_i}) + K_x x_{e_i}, \quad (9)$$

$$\omega_i^d = \omega_{r_i} + v_{r_i} (K_y y_{e_i} + K_\alpha \sin \alpha_{e_i}), \quad (10)$$

sendo K_x, K_y, K_α constantes definidas pelo projetista e

$$v_{r_i} = \sqrt{(\dot{x}_{r_i})^2 + (\dot{y}_{r_i})^2}, \quad \omega_{r_i} = \dot{\alpha}_{r_i}. \quad (11)$$

O controle baseado na dinâmica considera as velocidades angulares desejadas das rodas de cada RMR, $\dot{q}_{2_i}^d$. Então, é necessário definir as seguintes relações de velocidades:

$$\dot{q}_{2_i}^d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{d_i}^d \\ \dot{\theta}_{e_i}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/r & b/r \\ 1/r & -b/r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i^d \\ \omega_i^d \end{bmatrix} \quad (12)$$

sendo $\dot{\theta}_{d_i}^d$ and $\dot{\theta}_{e_i}^d$ as velocidades angulares das rodas direita e esquerda dos RMRs, respectivamente.

3.3 Modelo Dinâmico

A equação dinâmica de cada robô móvel, baseada na teoria de Lagrange, é descrita a seguir (veja detalhes em P. Coelho (2003)):

$$M(q_{1_i})\ddot{q}_{1_i} + C(q_{1_i}, \dot{q}_{1_i})\dot{q}_{1_i} = E\tau_i - A^T(q_{1_i})^T \lambda_i, \quad (13)$$

sendo $\lambda_i = [\lambda_{1_i} \ \lambda_{2_i} \ \lambda_{3_i}]^T$ o vetor de restrições das forças, $E = [0_{2 \times 3} \ I_{2 \times 2}]^T$ a matriz de entrada, $\tau_i = [\tau_{r_i} \ \tau_{l_i}]^T$ o vetor de torque nas rodas,

$$C(q_{1_i}, \dot{q}_{1_i}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & m d \dot{\alpha}_i \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m d \dot{\alpha}_i \sin \alpha_i & 0 & 0 \\ & & 0_{(3 \times 5)} & & \end{bmatrix}$$

a matriz de forças de coriolis e centrípeta, e

$$M(q_{1_i}) = \begin{bmatrix} m & 0 & m d \sin \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & m & -m d \cos \alpha_i & 0 & 0 \\ m d \sin \alpha_i & -m d \cos \alpha_i & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_w \end{bmatrix}$$

a matriz de inércia. Os parâmetros m e I são dados por $m = m_c + 2m_\omega$ e $I = I_c + 2m_\omega(d^2 + b^2) + 2I_m + m_c d^2$, sendo m_ω o conjunto da massa da roda e do rotor do motor; m_c é a massa da plataforma do robô; I_c é o momento de inércia da plataforma do robô em relação ao eixo vertical em P_c ; I_w é o momento de inércia da roda em relação ao eixo da roda; I_m é o momento de inércia da roda em relação ao eixo definido no plano da roda (perpendicular ao eixo da roda).

4 Controle \mathcal{H}_∞ Não Linear

Considere o seguinte problema de controle de realimentação de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= A(\rho(t))x_i + B_1(\rho(t))\omega_i + B_2(\rho(t))u_i, \\ z_{1_i} &= C_1(\rho(t))x_i, \\ z_{2_i} &= C_2(\rho(t))x_i + u_i \end{aligned} \quad (14)$$

sendo $x_i \in \mathbb{R}^n$ o estado do robô móvel i , $u_i \in \mathbb{R}^q$ a entrada de controle, $\omega_i \in \mathbb{R}^p$ a entrada de distúrbio, $z_{1_i} \in \mathbb{R}^{q_1}$ e $z_{2_i} \in \mathbb{R}^{q_2}$ as saídas controladas. $A(\cdot)$, $B(\cdot)$, $C_1(\cdot)$, $C_2(\cdot)$ são matrizes contínuas de dimensões apropriadas e $\rho(t) \in F_p^\nu$, são os parâmetros dependentes do tempo definidos por:

$$F_p^\nu = \{\rho \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^m) : \rho(t) \in P\}$$

sendo $P \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto compacto, e $\nu_k(\rho) \leq \dot{\rho}_k \leq \bar{\nu}_k(\rho)$ com $k = 1, \dots, m$.

O sistema (14) apresenta ganho L_{2_i} limitado no intervalo $[0, T]$ se

$$\int_0^T \|z_i(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_0^T \|\omega_i(t)\|^2 dt, \quad (15)$$

para todo $T \geq 0$ e todo $\omega_i \in L_{2_i}(0, T)$ com o sistema iniciando em $x_i(0) = 0$. O objetivo é encontrar uma função contínua $F(\rho(t))$ de tal modo que o ganho L_{2_i} seja limitado, com lei de controle $u_i = F(\rho(t))x_i$.

Lema 1 : (F. Wu, 1996) Se existir uma função continuamente diferenciável $X(\rho(t)) > 0$ para todo $\rho(t) \in P$ que satisfaça

$$\begin{bmatrix} G(\rho) & X(\rho)C_1^T(\rho) & B_1(\rho) \\ C_1(\rho)X(\rho) & -I & 0 \\ B_1^T(\rho) & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

sendo

$$G(\rho) = -\sum_{k=1}^m \bar{\nu}_k \frac{\partial X}{\partial \rho_k} + \hat{A}(\rho)X(\rho) + X(\rho)\hat{A}(\rho)^T$$

$-B_2(\rho)B_2^T(\rho) + \hat{A}(\rho) = A(\rho) - B_2(\rho)C_2(\rho)$. O ganho $F(\rho)$ de realimentação de estado é calculado da seguinte forma

$$u_i = -(B_2(\rho)^T X^{-1}(\rho) + C_2(\rho))x_i, \quad (17)$$

e garante que o sistema em malha fechada tenha ganho $L_2 \leq \gamma$ para toda variação paramétrica $\rho(t) \in F_p^\nu$.

A notação $\sum_{k=1}^m \bar{\nu}_k$ representa que toda combinação de $\bar{\nu}_k$ e $\underline{\nu}_k$ deve ser incluída na desigualdade. Então, (16) representa 2^m desigualdades.

Um esquema computacional prático ((Y. Huang, 1998) e (Siqueira and Terra, 2004)) pode ser utilizado para resolver as desigualdades matriciais lineares presentes na análise e síntese dos problemas LPV. Para encontrar $X(\rho(t))$ na Equação (16) deve-se escolher um conjunto de funções C^1 , $\{f_k(\rho(t))\}_{k=1}^M$, como base para $X(\rho)$, ou seja,

$$X(\rho(t)) = \sum_{k=1}^M f_k(\rho(t))X_k, \quad (18)$$

sendo $X_k \in S^{n \times n}$ a matriz coeficiente para $f_k(\rho(t))$. Se $X(\rho(t))$ em (16) é substituída por (18) o problema de realimentação do estado transforma-se em um problema de otimização (vide (18)).

4.1 Representação Quase-LPV do RMRs

O modelo dinâmico do RMR apresentado na Seção 3.3 é representado como um sistema quase-LPV, ou seja, o parâmetro ρ agora é uma função do estado, $\rho = \rho(x)$. Com a equação resultante em espaço de estado, o controle \mathcal{H}_∞ para sistemas LPV, descrito acima, pode ser aplicado em robôs móveis com rodas gerando um controlador não-linear baseado na dinâmica.

Diferenciando a Equação (5) em relação ao tempo, substituindo o resultado em (13) e multiplicando o lado esquerdo por S^T , obtém-se:

$$M_2 \ddot{q}_{2_i} + C_2(\dot{q}_{1_i})\dot{q}_{2_i} = S^T E \tau_i = \tau_i \quad (19)$$

sendo M_2 uma matriz simétrica constante, não-singular, dada por $S^T(q_1)M(q_1)S(q_1)$ e $C_2(\dot{q}_{1_i}) = C_2(\dot{\alpha}_i)$. Adicionando o distúrbio no torque $\omega_i = [\omega_{d_i} \ \omega_{e_i}]^T$ e substituindo (8) em (19), segue que

$$\ddot{q}_{2_i} = A_2(\dot{q}_{2_i})\dot{q}_{2_i} + B\tau_i + B\omega_i, \quad (20)$$

sendo $A_2(\dot{q}_{2_i}) = -M_2^{-1}C_2(\dot{q}_{2_i})$ e $B = M_2^{-1}$. Somando e subtraindo $\ddot{q}_{2_i}^d$ e $A_2(\dot{q}_{2_i})\dot{q}_{2_i}^d$ em (20) (sendo o índice “d” referente ao valor desejado) e definindo o estado de cada robô como:

$$\tilde{x}_i = \begin{bmatrix} \dot{q}_{2_i} \\ \tilde{q}_{2_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\theta}_{d_i} - \dot{\theta}_{d_i}^d) \\ (\dot{\theta}_{e_i} - \dot{\theta}_{e_i}^d) \\ (\theta_{d_i} - \theta_{d_i}^d) \\ (\theta_{e_i} - \theta_{e_i}^d) \end{bmatrix} \quad (21)$$

a representação quase-LPV para o controle de acompanhamento de trajetória do RMRs em formação é dada por:

$$\dot{\tilde{x}} = I_N \otimes \begin{bmatrix} A_2(\dot{q}_{2_i}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + I_N \otimes \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} u + I_N \otimes \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \omega \quad (22)$$

sendo N o número de RMRs em formação, $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)^T$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$ e assim, a lei de controle é dada por:

$$u_i = \ddot{q}_{2_i}^d - A_2\dot{q}_{2_i}^d + B\tau_i \quad \text{ou} \quad \tau_i = B^{-1}(\ddot{q}_{2_i}^d - A_2\dot{q}_{2_i}^d + u_i). \quad (23)$$

5 Resultados

Os resultados simulados foram obtidos através do software MATLAB, utilizando-se os seguintes parâmetros nominais para os RMRs: $m_p = 30(kg)$, $m_r = 1(kg)$, $a = 2(m)$, $b = 0.75(m)$, $d = 0.3(m)$, $r = 0.15(m)$ e os momentos de inércia $I_c = 15.625(kg.m^2)$, $I_r = 0.005(kg.m^2)$ e $I_m = 0.0025(kg.m^2)$. Para testar a robustez dos controladores, distúrbios externos foram introduzidos nos torques das rodas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega_d &= 800e^{-(t-6)^4} \text{sen}(1.3\pi t), \\ \omega_e &= -800e^{-(t-6)^4} \text{sen}(1.3\pi t). \end{aligned}$$

Para o controlador baseado na cinemática, os ganhos foram definidos como $K_x = 60$, $K_y = 15$, $K_\alpha = 30$.

5.1 Controle via Representação Quase-LPV

A matriz do sistema $A_2(\dot{q}_{2_i})$ é função apenas das velocidades das rodas, \dot{q}_{2_i} . Sendo assim, para o projeto do controlador quase-LPV pode-se considerar o parâmetro ρ definido em função dos erros de velocidade dos respectivos robôs como $\rho(\tilde{x}_i) = \dot{q}_{2_i}$. O conjunto P é dado por:

$$-\pi \leq \dot{\theta}_{d_i} \leq \pi(\text{rad/s}) \quad \text{e} \quad -\pi \leq \dot{\theta}_{e_i} \leq \pi(\text{rad/s}),$$

sendo $\nu_i = [\ddot{\theta}_{d_{i_{max}}} \quad \ddot{\theta}_{e_{i_{max}}}] = [2.5\pi \quad 2.5\pi](\text{rad/s}^2)$. Empiricamente, para a minimização de γ considerou-se $L = 3$ pontos do espaço de parâmetros. As funções base dependentes dos parâmetros selecionados são:

$$f_{1_i} = 10 + \cos\dot{\theta}_{d_i} + \text{sen}\dot{\theta}_{d_i} + \cos\dot{\theta}_{e_i} + \text{sen}\dot{\theta}_{e_i},$$

$$f_{2_i} = \cos\dot{\theta}_{d_i} + \cos\dot{\theta}_{e_i} \quad \text{e} \quad f_{3_i} = -\text{sen}\dot{\theta}_{d_i} + \text{sen}\dot{\theta}_{e_i}$$

Essas funções foram selecionadas de maneira a acentuar a influência da variação do erro da velocidade das rodas no cálculo dos ganhos dos torques. A desigualdade (16) é resolvida através do software *MATLAB*, sendo que em (14) $x_i = \tilde{x}_i$,

$$A(\rho(t))_i = \begin{bmatrix} A(\dot{q}_{2_i}) & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} I_{2 \times 2} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = I_{4 \times 4} \quad \text{e} \quad C_2 = 0.$$

As matrizes X_1 , X_2 e X_3 são encontradas para o melhor nível de atenuação $\gamma = 1655$ e são dadas por:

$$X_1 = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 1.213 & 0.132 & -1.837 & -0.109 \\ 0.132 & 1.213 & -0.109 & -1.837 \\ -1.837 & -0.109 & 3.040 & 0.096 \\ -0.109 & -1.837 & 0.096 & 3.040 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} -1.214 & -0.132 & 1.841 & 0.109 \\ -0.132 & -1.214 & 0.109 & 1.841 \\ 1.841 & 0.109 & -3.044 & -0.097 \\ 0.109 & 1.841 & -0.097 & -3.044 \end{bmatrix},$$

$$X_3 = 10^{-2} \times \begin{bmatrix} 1.195 & 0.127 & -1.781 & -0.099 \\ 0.127 & 1.195 & -0.099 & -1.781 \\ -1.781 & -0.099 & 2.978 & 0.090 \\ -0.099 & -1.781 & 0.090 & 2.978 \end{bmatrix}.$$

Sendo que para esta formação, utilizou-se L_Γ dada por:

$$L_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A Figura 3 apresenta os resultados de simulação do Controlador \mathcal{H}_∞ não Linear para uma formação contendo seis RMRs, formando um triângulo. A ampliação de uma parte da trajetória que aparece na figura registra exatamente o tempo em que o distúrbio foi inserido.

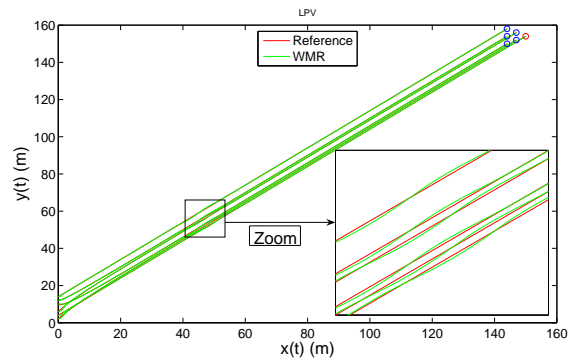


Figura 3: Controle \mathcal{H}_∞ não linear

5.2 Controle Torque Calculado e Proporcional Derivativo(TC+PD)

Um controle do tipo torque calculado acrescido de um controlador proporcional derivativo (PD) também foi utilizado para o controle dinâmico dos RMRs em formação. Consiste de um controle independente para cada roda, dado por:

$$\begin{aligned} u_{d_i} &= -[\theta_{d_i} - \theta_{d_i}^d]k_{p1} - [\dot{\theta}_{d_i} - \dot{\theta}_{d_i}^d]k_{p1}, \\ u_{e_i} &= -[\theta_{e_i} - \theta_{e_i}^d]k_{p2} - [\dot{\theta}_{e_i} - \dot{\theta}_{e_i}^d]k_{p2}. \end{aligned}$$

Os ganhos PDs foram ajustados em $k_{p1} = k_{p2} = -10.9$ e $k_{d1} = k_{d2} = -5$. Os torques aplicados nos RMRs são obtidos de acordo com a expressão dada em (23), a qual de fato é a equação conhecida para a metodologia do torque calculado. A Figura 4 apresenta os resultados de simulação do controlador TC+PD para as mesmas condições da Figura 3.

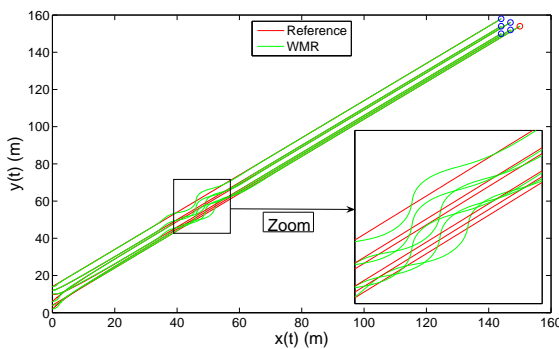


Figura 4: Controle TC+PD

6 Conclusões

Neste artigo é apresentado o controle de RMRs em formação utilizando controladores \mathcal{H}_∞ não lineares. Uma comparação do controlador proposto com um controle torque calculado mais PD é apresentada. Note que a abordagem apresentada aqui considera três fases de controle: o controle de formação, no qual o tipo de robô móvel não é considerado; os controles cinemáticos dos RMRs; e os controles dinâmicos, responsáveis pela garantia da robustez do sistema. Os resultados mostram a eficiência do controle \mathcal{H}_∞ não linear quando o sistema está sujeito a distúrbios externos.

Referências

- A. Willians, G. Lafferriere, J. V. (2005). Stable motions of vehicles formations, *Proceedings of the 44a. IEEE Conference on Decision e Control, and the European Control Conference* pp. 12–15.
- dos Reis, G. A., Siqueira, A. A. G. and Terra, M. H. (2005). Nonlinear \mathcal{H}_∞ Control via

Quasi-LPV representation and game theory for wheeled mobile robots, *IEEE International Symposium on, Mediterranean Conference on Control and Automation - MED2005*, Limassol, Chipre, pp. 686–691.

- F. Wu, X. H. Yang, A. P. G. B. (1996). Induced l_2 norm control for lpv systems with bounded parameter variation rates, *International journal of Robust and Nonlinear Control* **6**(9-10): 983–998.
- G. Lafferriere, J. Caughman, A. W. (2004). Graphic theoretic methods in the stability of vehicle formations, *Proceeding of American Control Conference* pp. 3724–3729.
- J. Fax, R. M. (2003). Information flow and cooperative control of vehicle formations, *IEEE Transactions on Automatic Control* **49**(9): 1465–1476.
- Kruppa, H., Fox, D., Burgard, W. and Thrun., S. (2000). A probabilistic approach to collaborative multirobot localization, *Auton. Robots* pp. 325–344.
- Nilsson, M., Mataric, M. and Simsarian, K. (1995). Cooperative multi-robot box pushing, *Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems*, pp. 556–561.
- P. Coelho, U. N. (2003). Lie algebra application to mobile robot control: A tutorial, *Robotica* **21**: 483–493.
- Siqueira, A. A. G. and Terra, M. H. (2004). Non-linear and Markovian \mathcal{H}_∞ Controls of Underactuated Manipulators, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **12**(6): 811–826.
- Sugar, T. and Kumar, V. (2000). Control and coordination of multiple robots in manipulation and material handling tasks, *Experimental Robotics VI: Lecture Notes in Control and Information Sciences* (250): 15–24.
- Whelan, G., Jennings, J. and Evans., W. (1997). A bounded real lemma for jump systems, *IEEE Int. Conf. Advanced Robotics* pp. 193–200.
- Y. Huang, A. J. (1998). "nonlinear \mathcal{H}_∞ control: An enhanced quasi-lpv approach."in workshop in \mathcal{H}_∞ nonlinear control by j. c. doyle, *Proc. IEEE International Conference on Decision and Control, Tampa, Florida, USA*.
- Y. Kanayama, Y. Kimura, F. M. T. N. (1990). A stable tracking control method for an autonomous mobile robots, in *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation* pp. 384–389.